

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Simultan

Persamaan simultan timbul hampir disetiap cabang matematik, dalam beberapa hal, persamaan ini timbul langsung dari perumusan mula dari persoalannya, didalam hal lain penyelesaian dari persamaan merupakan bagian dari pengerjaan beberapa macam soal lain.

Orang seringkali menghadapi masalah yang melibatkan penyelesaian suatu himpunan dari persamaan simultan dan yang paling sering adalah persamaan linier. Masalah yang melibatkan persamaan linier simultan timbul diberbagai bidang elastisitas, analisis sirkuit elektronik, penghantar panas, getaran, dan lain-lain.

Dalam aljabar dikenal dua metode dalam menyelesaikan persamaan simultan, yaitu: eliminasi dan determinan. Dalam menyelesaikan persamaan simultan dengan tiga variabel, metode determinan lebih mempunyai keuntungan daripada metode eliminasi. Tetapi dalam menyelesaikan persamaan simultan dengan variabel yang lebih banyak, metode tersebut menjadi sangat tidak praktis. Hal ini dikarenakan dalam menyelesaikan persamaan simultan dengan n variabel diperlukan $(n - 1)(n + 1)!$ perkalian. Jadi jika hendak menyelesaikan suatu persamaan simultan dengan sepuluh variabel dengan metode determinan, maka diperlukan 359,251,200 perkalian.

Kurva merupakan pendekatan terbaik dari suatu himpunan data percobaan yang berkaitan dengan penyelesaian suatu sistem persamaan simultan. Penyelesaian satu set n persamaan dengan n variabel. Setiap suku dari setiap persamaan mengandung hanya satu variabel, dan setiap variabel berpangkat satu. Persamaan demikian disebut linier. Dalam hal dua variabel, grafik dari persamaan ini adalah garis lurus, untuk tiga variabel, grafiknya adalah suatu bidang, sedangkan lebih dari tiga variabel disebut *hyperplan*. Jawab yang dicari adalah satu himpunan harga dari n variabel yang bila disubstitusikan ke- n persamaan memenuhi semuanya secara simultan.

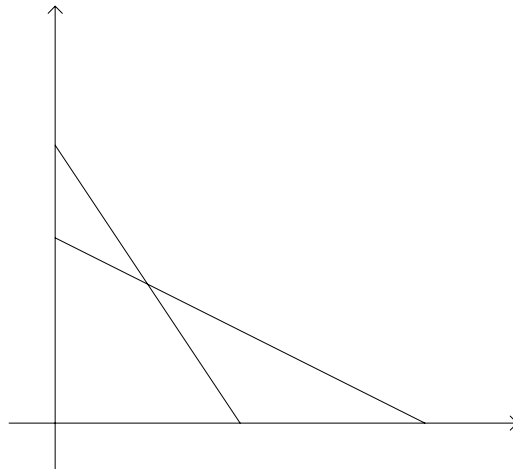
Bila diketahui satu himpunan persamaan sembarang, maka tidak dapat dikatakan tanpa menyelidiki bahwa persamaan tersebut ada jawabnya atau tidak. Terdapat tiga kemungkinan jawaban dari persamaan linier simultan sembarang, yaitu :

- a. Sistem mempunyai jawaban unik. Sebagai contoh :

$$3x + 2y = 6 \quad (2.1)$$

$$x + 2y = 4$$

Jawabnya adalah $x = 1$ dan $y = 1.5$, tidak ada pasangan lain dari harga x dan y yang memenuhi kedua persamaan. Sistem semacam ini yang menjadi tujuan utama dari pencarian jawaban. Ditunjukkan secara geometrik dalam dua dimensi pada Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa kedua garis berpotongan hanya pada satu titik. Koordinat titik ini adalah jawab yang dicari.



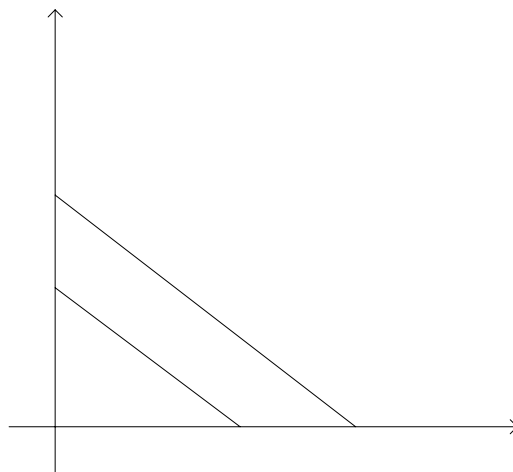
Gambar 2.1 Dua persamaan simultan yang mempunyai jawab unik

b. Sistem tidak mempunyai jawab. Sebagai contoh :

$$3x + 4y = 10 \quad (2.2)$$

$$6x + 8y = 12$$

Persamaan seperti ini tidak akan memiliki jawab. Gambar 2.2 memperlihatkan grafik dari dua garis ini. Kedua garis sejajar; tidak akan bertemu, sehingga tidak ada jawab



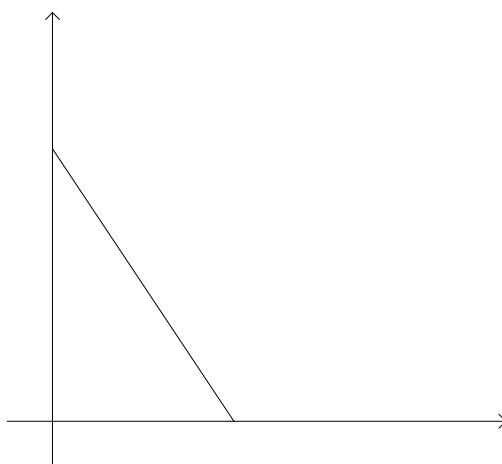
Gambar 2.2 Dua persamaan simultan yang tidak mempunyai jawab

c. Sistem mempunyai jumlah jawab tak berhingga. Sebagai contoh :

$$3x + 2y = 6 \quad (2.3)$$

$$6x + 4y = 12$$

Persamaan seperti ini mempunyai banyak jawab yang memenuhi persamaan, seperti $x = 2, y = 0$; $x = 0, y = 3$; $x = 1, y = 1.5$, dan seterusnya.



Gambar 2.3 Dua persamaan simultan mempunyai jumlah jawab tak berhingga

Sistem persamaan garis sejajar dan sistem persamaan garis yang bersinggungan dikatakan singular. Kadang-kadang diketahui dari perumusan suatu persoalan bahwa sistem tidak dapat singular. Bila informasi ini tidak ada, maka harus menggantungkan pada metoda penyelesaian untuk mengetahui singularnya atau membuat pengujian eksplisit untuk kemungkinannya.

Suatu pengujian langsung dapat dilakukan dengan menghitung determinan dari koefisien sistem, bila nol berarti singular. Keburukannya, penghitungan determinan hampir sama usahanya dengan penyelesaian persamaannya.

Dari sudut pandang matematik presisi tak berhingga dari suatu sistem memiliki dua kemungkinan, yaitu: singular atau tidak. Dari sudut pandang perhitungan praktis suatu sistem hampir semuanya singular, yang memberikan jawab yang mempunyai keandalan yang kecil.

Pada umumnya terdapat dua macam teknik numerik untuk menyelesaikan persamaan simultan, yaitu: metode langsung yang berhingga dan metode tak langsung yang tak berhingga. Metode langsung pada prinsipnya (dengan mengabaikan galat pembulatan) akan memberikan jawab eksak, bila operasi matematik berhingga jumlahnya. Sedangkan metode tak langsung, pada prinsipnya membutuhkan suatu operasi matematika yang tak berhingga banyaknya untuk memberikan jawab eksak. Dengan kata lain metode tak langsung mempunyai galat pemotongan, sedangkan metode langsung tidak mempunyainya.

Dalam sistem dengan kondisi buruk, galat pembulatan dalam metode langsung akan menghasilkan jawab yang tidak berarti. Sedangkan metode tak langsung walaupun secara teoritik ada galat pemotongannya, metode ini mungkin lebih baik karena metode ini galat pembulatannya tidak mengumpul.

2.2 Metode Numerik

Metode numerik adalah salah satu alternatif pencarian jawaban dalam permasalahan matematika yang tidak dapat diselesaikan secara analisis. Tujuan dari metode ini adalah mencari metode yang terbaik untuk memperoleh jawaban yang berguna dari persoalan matematika dan untuk menarik informasi yang berguna dari berbagai jawaban yang dapat diperoleh.

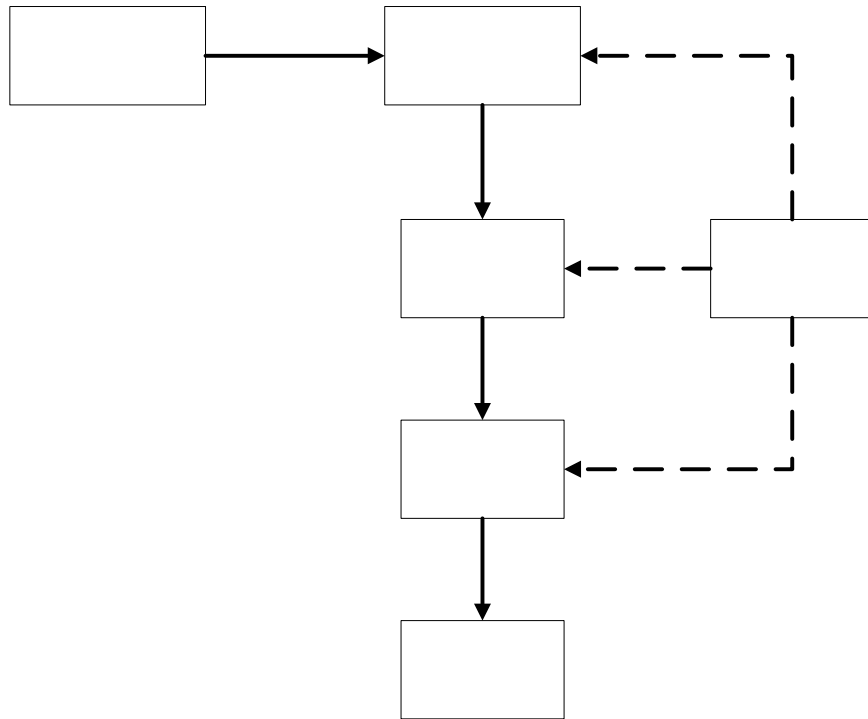
Menurut Djojodihardjo (2000, p2) dalam mengerjakan metode numerik terdapat beberapa cara pendekatan, yaitu:

- a. Pendekatan atau penyederhanaan perumusan persoalan sehingga dapat dipecahkan secara eksak.
- b. Mengusahakan diperolehnya jawab pendekatan dari persoalan yang perumusannya eksak.
- c. Gabungan dari kedua cara pemecahan diatas.

Pada umumnya metoda numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan perumusan metoda yang menghasilkan jawab pendekatan yang memiliki selisih sebesar suatu nilai yang ditentukan berdasarkan kesepakatan dari jawab eksak.

Menurut Djojodihardjo (2000, p12) proses pemecahan persoalan, pada umumnya berlangsung dalam tiga tahap, yaitu:

- a. Perumusan secara tepat dari model matematik dan model numerik yang berkaitan
- b. Penyusunan metode untuk memecahkan persoalan numerik
- c. Penerapan metode untuk menghitung jawaban yan dicari



Masalah
Dalam Sa
Rekay

Gambar 2.4 Proses pemecahan persoalan dalam metode numerik

2.3 Galat

Walaupun orang selalu berusaha untuk memperoleh jawaban yang eksak, namun pada kenyataannya jawaban tersebut mungkin tidak ada, maka dari itu dibutuhkanlah suatu pendekatan numerik untuk mencari jawaban tersebut. Pada tiap langkah penyelesaian persoalan, dari formulasi hingga komputasi numeriknya, galat (kesalahan) dan ketidakpastian dapat terjadi.

Terdapat beberapa macam galat, yaitu :

a. Galat Absolut

adalah selisih antara nilai sebenarnya dengan suatu pendekatan pada nilai sebenarnya.

$$e = x - \bar{x} \tag{2.4}$$

dimana x adalah nilai sebenarnya

\bar{x} adalah pendekatan pada nilai sebenarnya

e adalah galat absolut

b. Galat Relatif

adalah galat absolut dibagi dengan nilai sebenarnya, tetapi karena nilai sebenarnya tidak diketahui dan yang diketahui hanya nilai pendekatan maka galat relatif didefinisikan sebagai :

$$e_r = \frac{e}{\bar{x}} \quad (2.5)$$

dimana e adalah galat absolut

\bar{x} adalah pendekatan pada nilai sebenarnya

e_r adalah galat relatif

c. Galat Inheren

adalah galat dalam nilai data, disebabkan oleh ketidakpastian dalam pengukuran, kekeliruan atau oleh perlunya pendekatan untuk menyatakan suatu bilangan yang angkanya tidak secara tepat dapat dinyatakan dengan banyaknya angka yang tersedia.

Galat inheren berhubungan dengan galat pada data yang dioperasikan oleh suatu komputer dengan beberapa prosedur numerik.

contoh : jika seseorang mengukur suatu selang waktu dan mendapati angka pada alat ukurnya adalah 2.4 detik, dapat dipastikan bahwa terdapat beberapa galat inheren karena hanya dengan suatu kebetulan selang waktu akan di ukur tepat 2.4 detik. Dalam beberapa hal boleh jadi beberapa batas yang mungkin

pada galat inheren diketahui, seperti bila selang waktu dinyatakan sebagai 2.4 dengan ± 0.1 detik.

d. Galat Pemotongan

adalah galat yang terjadi akibat pemotongan atau pemenggalan nilai yang jumlahnya tidak terhingga.

Galat pemotongan berhubungan dengan galat yang disebabkan oleh cara pelaksanaan prosedur numerik. Galat pemotongan merupakan galat yang terpenting karena kebanyakan prosedur yang dipakai dalam perhitungan numerik adalah tak berhingga.

contoh : Deret Taylor tak berhingga

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.6)$$

e. Galat Pembulatan

adalah galat yang terjadi karena user membatasi jumlah bilangan, sehingga terjadi pembulatan terhadap bilangan tersebut.

contoh : komputer yang tiap bilangannya hanya dinyatakan sampai 4 angka dan ingin menjumlahkan bilangan 91.20 dan 12.55, keduanya dianggap eksak. Jumlahnya adalah 103.75, yaitu terdiri dari 5 angka sehingga tidak dapat disimpan dalam memori komputer, hal ini menyebabkan komputer membulatkan bilangan tersebut menjadi 103.8 agar dapat disimpan dalam memorinya.

2.4 Eliminasi Gauss

Teknik yang paling banyak digunakan untuk penyelesaian persamaan linier simultan adalah Eliminasi Gauss.

Secara umum dapat dirumuskan prosedur untuk n persamaan linier simultan dengan n variable. Misalkan n variable adalah x_1, x_2, \dots, x_n dan misalkan sistem persamaan berbentuk :

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots &\dots \\
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\
 \dots &\dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Susun persamaan sehingga $a_{11} \neq 0$. Definisikan faktor pengali $n - 1$ buah, yaitu :

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \tag{2.8}$$

dan kurangkan m_i kali persamaan pertama dari persamaan ke- i . Bila didefinisikan :

$$a'_{ij} = a_{ij} - m_i a_{1j}, \quad i = 2, 3, \dots, n \tag{2.9}$$

$$b'_i = b_i - m_i b_1, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.10}$$

maka dapat dilihat bahwa :

$$a'_{i1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n \tag{2.11}$$

Persamaan yang telah ditransformasikan adalah :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$0 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2j}x_j + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

.....

$$0 + a'_{i2}x_2 + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{in}x_n = b'_i$$

.....

$$0 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nj}x_j + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \tag{2.12}$$

Pada tingkat ke- k maka dihilangkan x_k dengan mendefinisikan faktor pengali :

$$m_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \tag{2.13}$$

di mana :

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0, \tag{2.14}$$

sehingga :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} \tag{2.15}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} b_i^{(k-1)} \tag{2.16}$$

Untuk $i = k+1, \dots, n$ dan untuk $j = k, \dots, n$.

Indeks k adalah harga bilangan bulat berturut-turut dari 1 sampai dengan $n-1$. Dititik di mana $k = n-1$ dieliminasi x_{n-1} dari persamaan terakhir.

Set persamaan segitiga terakhir adalah :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}^1x_2 + \dots + a_{2j}^1x_j + \dots + a_{2n}^1x_n = b_2^1$$

.....

$$a_{jj}^{(j-1)}x_j + \dots + a_{jn}^{(j-1)}x_n = b_j^{(j-1)}$$

.....

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \tag{2.17}$$

Proses eliminasi tidak mengubah harga determinan walaupun setiap penukaran baris mengubah tanda. Setelah proses eliminasi selesai, harga determinan adalah hasil kali elemen diagonal utama, dengan tanda berlawanan bila terjadi jumlah penukaran baris yang ganjil.

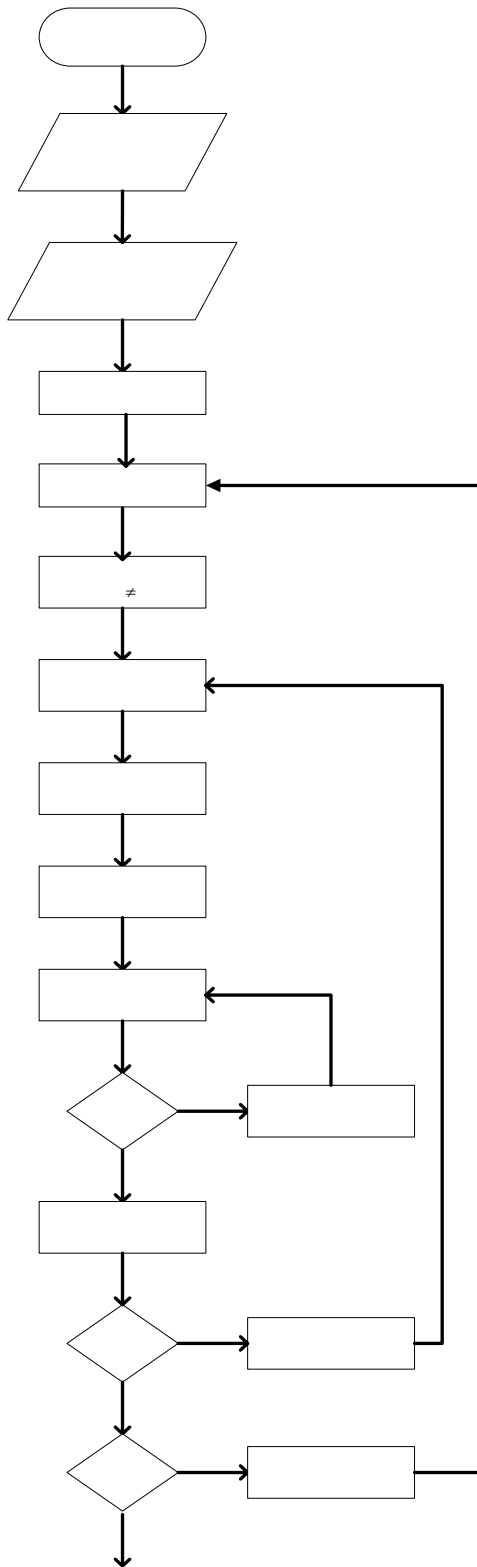
Substitusi kembali dapat dilakukan sebagai berikut :

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_{n-1} = \frac{\left(b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,nn}^{(n-2)} x_n \right)}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}$$

$$x_j = \frac{\left(b_j^{(j-1)} - a_{jn}^{(j-1)} x_n - \dots - a_{j,j+1}^{j-1} x_{j+1} \right)}{a_{jj}^{(j-1)}}$$

untuk $j = n-2, \dots, 1$ (2.18)



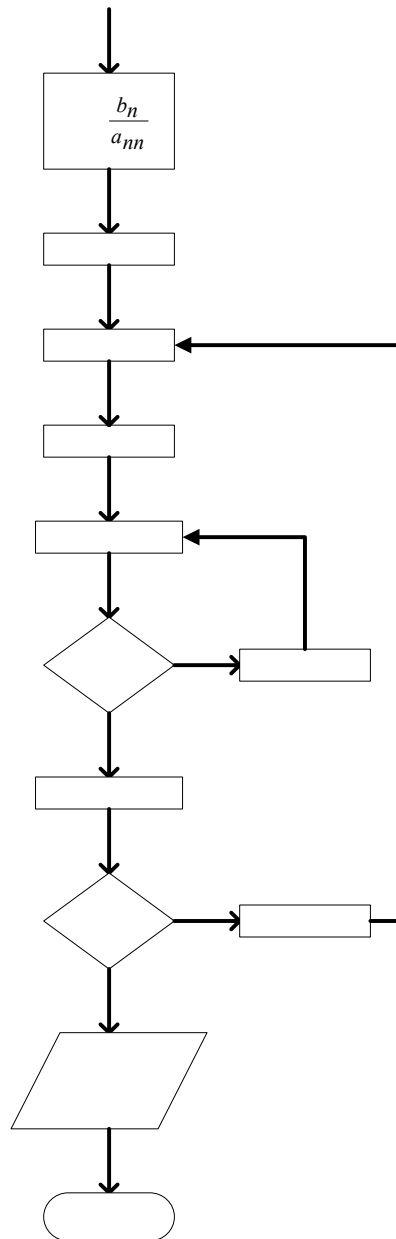
Gambar 2.5 Flowchart dari metode Eliminasi Gauss

Dalam flowchart arti dari indeks i, j, k adalah :

k adalah jumlah persamaan yang diperkurangkan dari persamaan lain, juga jumlah variabel yang dihilangkan dari $n - k$ persamaan terakhir.

i adalah jumlah persamaan dimana harga variabel biasanya dihilangkan.

j adalah jumlah kolom.



Gambar 2.6 Flowchart dari substitusi kembali pada Eliminasi Gauss

2.5 Gauss-Seidel

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan linier. Pada metode iterasi terdapat galat pembulatan yang kecil, dan metode ini konvergen hanya pada syarat tertentu.

Misalkan n variable adalah x_1, x_2, \dots, x_n dan misalkan sistem persamaan (2.7).

Anggap $a_{ii} \neq 0$ untuk semua i . pendekatan tingkat ke- k untuk x_i adalah :

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \dots - a_{i,j-1}x_{j-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \dots - a_{in}x_n^{(k-1)} \right\} \quad (2.19)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Proses diiterasikan hingga semua $x_i^{(k)}$ dikurang $x_i^{(k-1)}$ mencapai galat yang telah ditentukan.

Suatu cara yang khusus dari penentuan kelebihan adalah dengan mengambil :

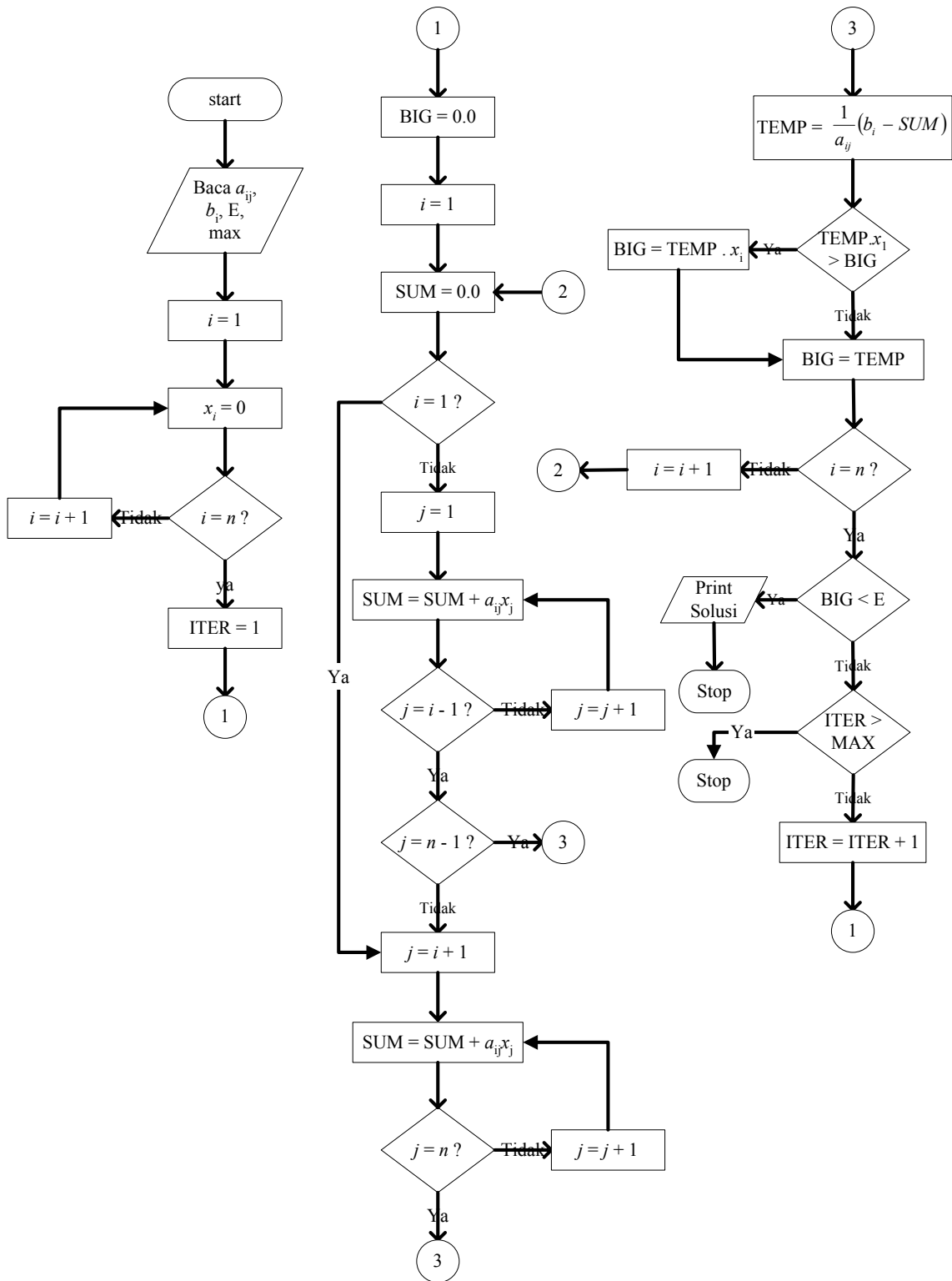
$$M^{(k)} = \text{maks} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad (2.20)$$

untuk semua i . Kemudian jika :

$$M^{(k)} < \varepsilon \quad (2.21)$$

dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil, maka proses iterasi dihentikan. Selain itu, perbedaan relatif dapat diuji, dengan menggunakan :

$$M^{(k)} = \text{maks} \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}. \quad (2.22)$$



Gambar 2.7 Flowchart metode iterasi Gauss-Seidel

Suatu persamaan dalam metode Gauss-Seidel dikatakan konvergen bila memenuhi syarat :

$$\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1 \quad (2.23)$$

Syarat tersebut dapat dipenuhi jika :

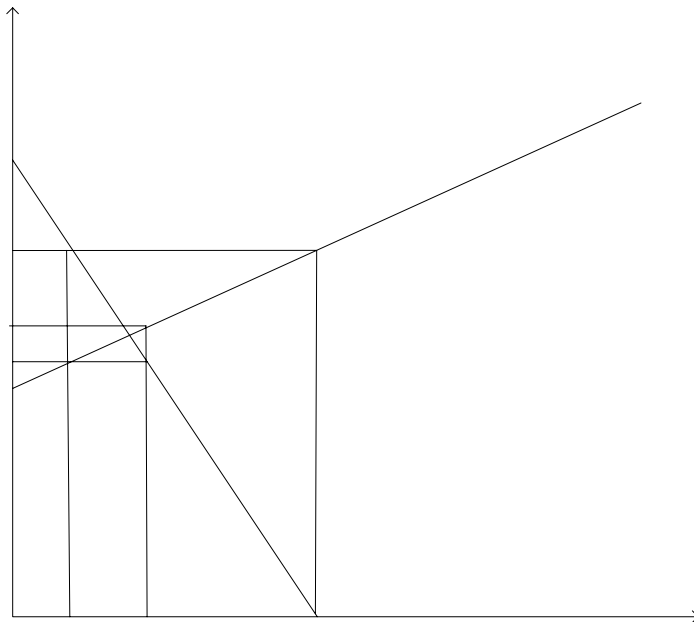
$$\left| a_{11} \right| > \left| a_{12} \right| \quad (2.24)$$

$$\left| a_{22} \right| > \left| a_{21} \right|$$

atau jika :

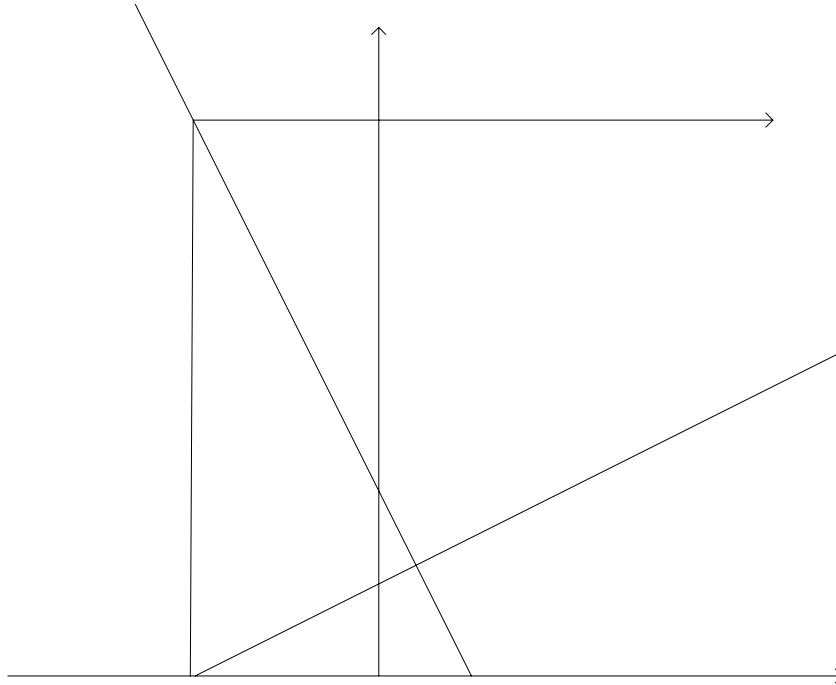
$$\left| a_{11} \right| \geq \left| a_{12} \right| \quad (2.25)$$

$$\left| a_{22} \right| > \left| a_{21} \right|$$



Gambar 2.8 Metode Gauss-Seidel yang konvergen

Jika terdapat suatu persamaan yang mempunyai kemiringan dari persamaan pertama lebih kecil dari 1 sehingga Δx cenderung besar, dan kemiringan dari persamaan kedua besar sehingga Δy besar, maka proses dikatakan divergen.



Gambar 2.9 Metode Gauss-Seidel yang divergen

Syarat cukup agar iterasi Gauss-Seidel konvergen untuk n persamaan adalah bila persamaan tidak dapat direduksi (persamaan tersebut tidak dapat disusun sehingga beberapa variabel dapat dipecahkan dengan memecahkan kurang dari n persamaan) dan

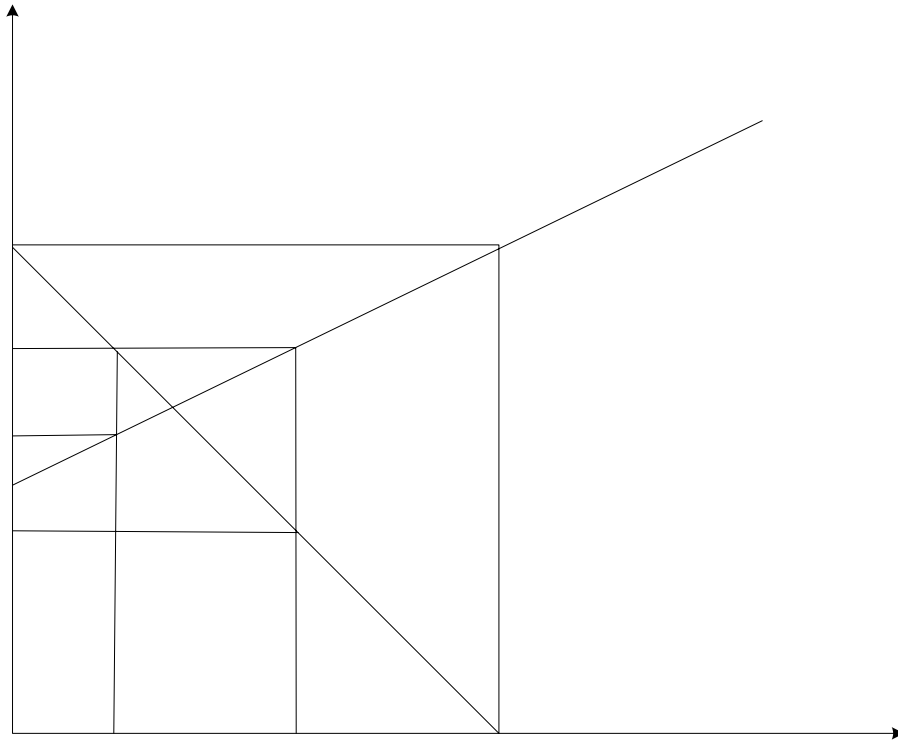
$$|a_{ii}| \geq |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| \quad (2.26)$$

untuk semua i , dan jika sedikitnya untuk satu i

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| \quad (2.27)$$

maka metode Gauss-Seidel konvergen untuk mencapai jawab dari (2.7).

Syarat diatas menjamin konvergensi. Tetapi perlu ditekankan bahwa syarat diatas bukan merupakan syarat perlu tetapi hanya merupakan syarat cukup.



Gambar 2.10 Metode iterasi Gauss-Seidel yang konvergen tetapi tidak memenuhi syarat cukup untuk konvergen

2.6 Steepest Descent

Metode iteratif lain yang akan dipakai dalam menyelesaikan persamaan simultan adalah metode Steepest Decent. Metode ini membangkitkan urutan ¹ dari perkiraan berbagai solusi $\{x\}$. Evaluasi dari metode iterasi ini memfokuskan pada seberapa cepat iterasi tersebut membuat x konvergen.

Anggap fungsi $\phi(x)$, didefinisikan sebagai :

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^t A x - x^t b \quad (2.28)$$

dimana A adalah sebuah matriks $n \times n$. Masalah dari pencarian solusi untuk sistem persamaan linier (contohnya $Ax = b$) adalah sama dengan meminimalisasikan fungsi $\phi(x)$.

Salah satu metode untuk meminimalisasikan fungsi $\phi(x)$ adalah metode Steepest Descent.

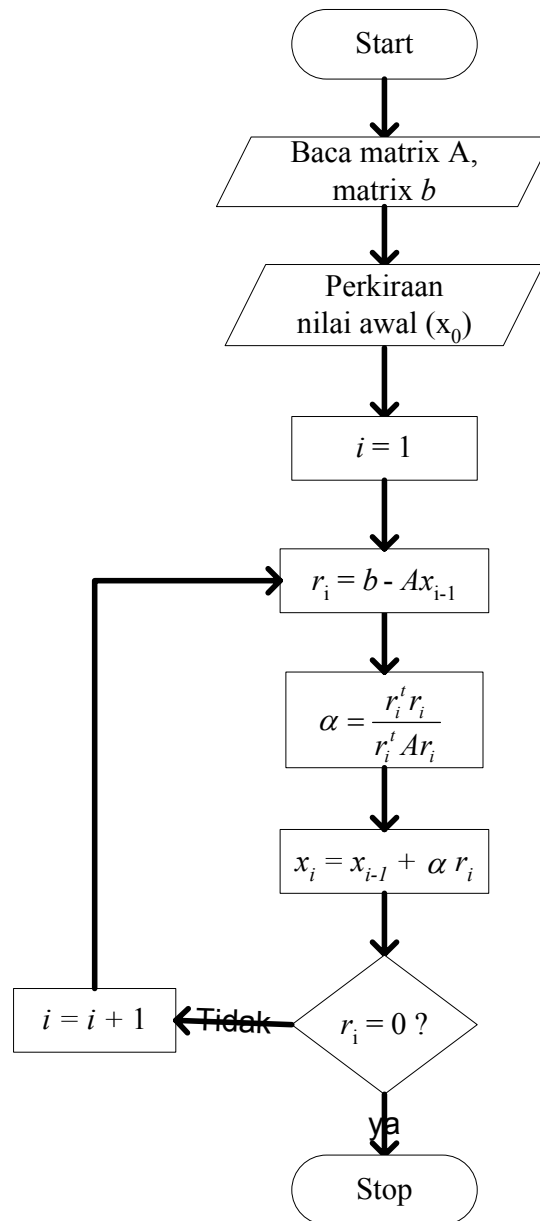
Dibawah ini adalah skema dari metode Steepest Decent.

- (1) Mulai dengan perkiraan nilai awal (x_0).
- (2) Cari arah dari Steepest Descent (yaitu : $-\nabla\phi(x) = r_c = b - Ax_c$).
- (3) Nilai selanjutnya (x_{next}) dicapai dengan menjumlahkan nilai awal dengan arahnya, dirumuskan dengan $x_{next} = x_c + \alpha r_c$, dimana α didapat dengan rumus

$$\alpha = \frac{r_c^t r_c}{r_c^t A r_c}.$$

- (4) Perulangan ini selesai hingga didapat nilai yang diinginkan x_e (*the equilibrium point*), dimana $r_c = 0$ pada titik tersebut.

Catatan $-\nabla\phi(x) = r_c = b - Ax_c$ disebut sebagai residu dari titik iterasi x_c .

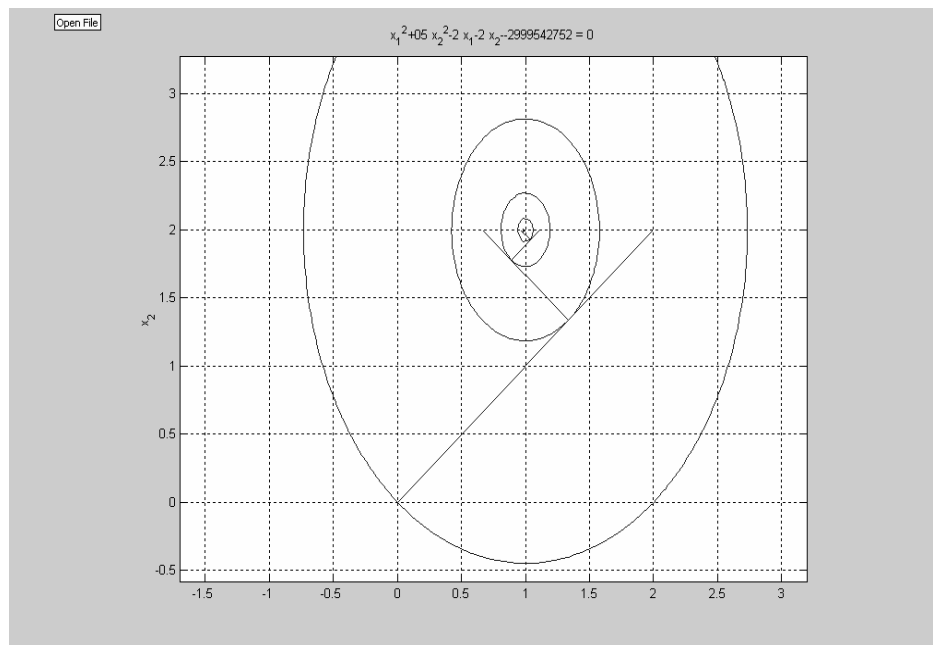


Gambar 2.11 Flowchart Metode Steepest Decent

Secara geometri, metode ini dideskripsikan sebagai berikut :

Untuk suatu titik yang ditentukan $x_0 \neq x_e$, $\phi(x) = \phi(x_c)$ adalah suatu tingkatan kurva yang tidak berpotongan dengan equilibrium point x_e . Tingkatan kurva ini adalah sebuah elipsoida. Dalam skema diatas maka didapat titik selanjutnya pada setiap iterasi. Titik

itu berada pada elipsoida selanjutnya $\phi(x) = \phi(x_{next})$. Elipsoida yang didapat pada setiap iterasi akan semakin mengecil dibanding elipsoida sebelumnya. Iterasi ini dilakukan hingga menemukan x_e . Lintasan dari x dapat dilihat mulai dari x_0 selalu berjalan mendekati x_e . Melalui pemikiran geometri ini pula, kita mendapatkan bahwa $r_i \perp r_{i+1}$ untuk semua i . Steepest Decent menjamin kekonvergenan dari x . Tapi kadang-kadang berjalan lambat (membutuhkan banyak iterasi).



Gambar 2.12 Metode Steepest Decent